PERIODE ENJEUX

MATHS0

Portail ST

Faculté des Sciences et Ingénierie

Campus VALROSE

Programme

Le contenu de ce programme se trouve dans les programmes de terminales ES et S 2019/20.
Les deux premiers thèmes se feront uniquement sur WIMS.
Les 8 thèmes suivants se feront en séances de cours-TD et en séances WIMS.

01/ 1ers éléments de logique et un peu de vocabulaire de la théorie des ensembles
- Fabriquer un énoncé, nier un énoncé
- Théorie des ensembles, symboles, quantificateurs
- Applications, image directe, image réciproque

02/ Prouver un énoncé
- Démonstrations directe, par contraposition, par l'absurde

1/ Calculs, fractions, inégalités, valeur absolue, minorants, majorants
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Règles de calcul sur les inégalités
La valeur absolue
Majorants et minorants
- Intervalles

2/ Somme et produit finis, factorielle, somme arithmétque ou géométrique
- Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle
- Raisonnement par récurrence
- Suites arithmétiques et géométriques

3/ Calculs dans $\mathbb{C}$: addition, multiplication, module, inverse, conjugué
- Equation du second degré
- Représentation géométrique d'un nombre complexe

4/ Trigonométrie, formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe
- Cosinus et sinus d'un angle
- forme trigonométrique d'un nombre complexe

5/ Droites du plan
- Définition
- Equations d'une droite
- Intersections de droites
- Zones du plan délimitées par des droites
- Plans et droites de l'espace

6/ Limites de fonctions. Fonctions puissances, exponentielle et logarithme
- Limites de fonctions

Opérations sur les limites, Comment lever une indétermination, Limites et comparaison
- Etude et graphe de fonctions usuelles

Fonctions Puissances
Fonction Exponentielle
Fonction Logarithme Népérien
Quelques premières formules de dérivation

7/ Etude de fonctions et représentation graphique de fonctions

- Ensemble de définition et courbe représentative

Position relative de deux courbes

Fonctions paires, fonctions impaires

- Etude générale

Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

Dérivabilité, calcul de la dérivée, tangente

Signe de la dérivée et sens de variation

Dérivée et extremum

Représentation graphique de fonction

8/ Calcul intégral

- Intégrale d'une fonction continue et positive
- Notion de primitives
- Calculs de primitives
- Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque
- Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

1 Thème 1 : Calculs, fractions, inégalités, valeur absolue, minorants, majorants

1.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{N}$ l'**ensemble des entiers naturels** (c'est à dire les nombres positifs sans chiffre après la virgule) : $0, 1, 2, 3, \ldots$

On note $\mathbb{Z}$ l'**ensemble des entiers relatifs**, c'est-à-dire des entiers positifs ou négatifs. Cet ensemble contient $\mathbb{N}$ mais aussi les nombres $-1, -2, -3, \ldots$.

On note

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ est l'**ensemble des rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des fractions $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q est un entier relatif non-nul. Cet ensemble contient $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de partie décimale quelconque. Cet ensemble contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ mais certains nombres, comme $\sqrt{2}$, sont des réels mais n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. Un tel nombre, qui appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$, est dit **irrationnel**.

Exercice 1.1. Calculer et écrire sous forme irréductible :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{7} - \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{\frac{5}{6}}, \qquad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \qquad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}},$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3}, \qquad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}, \qquad \frac{10}{x} - \frac{7}{2x}, \qquad \frac{1+x}{2-x} + \frac{5}{2-x}, \qquad \frac{1+x}{2-x} + \frac{1}{1-x}.$$

1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.2.1 Règles de calcul sur les inégalités

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k > 0$, si $a < b$, alors $ka < kb$,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall k < 0$, si $a < b$, alors $ka > kb$,
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors $0 \leq ac < bd$,
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a < b \leq 0$ et $c < d \leq 0$, alors $0 \leq bd < ac$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$).
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).

Exercice 1.2. Dans chacun des cas suivants, déterminer **sans calculatrice** lequel des deux nombres proposés est le plus grand.

1. $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$.
2. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{7}$.
3. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{3}$ et 2.
5. $2 + \sqrt{3}$ et 4.
6. $\sqrt{2}$ et $\frac{3}{2}$.
7. $\sqrt{5}$ et $\frac{7}{3}$.
8. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ et 3.
9. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Exercice 1.3. Encadrer :

1. $\frac{x+1}{2x+3}$ pour $x \in [0,2]$.
2. $\sqrt{2x+1}$ pour $x \in [1,2]$
3. $\frac{1}{4x+5}$ pour $x \in [-1,5]$
4. $\frac{x+1}{2x+2}$ pour $x \in [0,2]$
5. $(x+2)(x-10)$ pour $x \in [3,5]$
6. $\frac{x+2}{x-10}$ pour $x \in [3,5]$
7. $x^2 - 8x - 20$ pour $x \in [3,5]$.
8. $(5x+3)^2$ pour $x \in [0,2]$ puis pour $x \in [-1,1]$

1.2.2 La valeur absolue

Sur $\mathbb{R}$, on appelle valeur absolue l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{lcll} |\,x\,| & = & x & \text{si } x \geq 0 \\ |\,x\,| & = & -x & \text{si } x < 0 \end{array}.$$

Ainsi, si a et b sont deux nombres réels, $|a-b|$ représente la distance entre a et b sur l'axe réel.

1.2.3 Majorants et minorants

Définition 1.1. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E est* **majoré** *(respectivement* **minoré***) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout $x \in E$ on ait $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).*
Un élément M vérifiant la propriété ci dessus s'appelle un majorant de E (resp. m s'appelle un minorant de E).
Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Exemple 1.1. *L'intervalle $A =]-\infty, 1[$ est majoré, mais il n'est pas minoré. Les nombres 5, π, 2, 1 sont des majorants de A. Il en existe une infinité d'autres. L'ensemble A ne possède aucun minorant.*

Définition 1.2. *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que E possède un maximum s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq M$. On dira que E possède un minimum s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq m$.*

ATTENTION : La différence fondamentale entre cette définition et la précédente porte sur le fait que le majorant M appartient ou pas à l'ensemble E. Par exemple, l'ensemble $A = [0,1]$ possède un maximum et un minimum : $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$. Par contre, l'ensemble $B = [0,1[$ n'a pas de maximum (bien qu'il soit borné).

Exercice 1.4. (i) Dessiner l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}.$$

Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de A ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

(ii) Dessiner l'ensemble

$$B = \{x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \sqrt{2}\}.$$

Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de B ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

(iii) Dessiner l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \geq -2\}.$$

Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de C ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

(iv) Dessiner l'ensemble $D = A \cap B$. Dans la liste suivante, quels sont les majorants (resp. minorants) de D ?

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 5,\ 7,\ 10$$

1.3 Intervalles

Définition 1.3. *On appelle* intervalle fermé *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$[a;b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\},\ [a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\},\ ]-\infty;a]=\{x\in\mathbb{R}: x\le a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a<b$ *sont des nombres réels. On appelle* intervalle ouvert *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes.*

$$]a;b[=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\},\ ]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: a<x\},\ ]-\infty;a[=\{x\in\mathbb{R}: x<a\},\ \mathbb{R} \text{ ou } \emptyset,$$

où $a<b$ *sont des nombres réels. Enfin, on appelle* intervalle *de* $\mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *qui est un intervalle ouvert, un intervalle fermé ou un ensemble de l'une des formes suivantes*

$$[a;b[=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\},\ ]a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\},$$

où $a<b$ *sont des nombres réels.*

Exercice 1.5. Écrire sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) les sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1. $A=\{x\in\mathbb{R},\ -1<x\le\sqrt{2}\}$
2. $B=\{x\in\mathbb{R},\ 2\le x<5 \text{ et } 6\le x<7\}$
3. $C=]-5,\pi]\cap[2,18[$
4. $D=\{x\in\mathbb{R},\ x^2\le 4\}$
5. $E=\{x\in\mathbb{R},\ x^2\ge 9\}$

1.4 Exercices supplémentaires

Exercice 1.6. Soit x,y tels que $-4<x<-2$ et $8<y<10$. Donnez un encadrement de $x-y$, xy et de $-\sqrt{x^2}$.

Exercice 1.7. Vrai ou faux ?

1. Pour que $x^2>10000$, il suffit que $x>100$.
2. Pour que $x^2>10000$, il faut que $x>100$.
3. Pour que $x>100$, il suffit que $x^2>10000$.
4. Pour que $x>100$, il faut que $x^2>10000$.
5. Pour que $\frac{1}{x}>100$, il suffit que $x<10^{-2}$.
6. Pour que $5x^2+\frac{10}{x}>100$, il suffit que $x<-5$.
7. Pour que $5x^2+\frac{10}{x}>100$, il faut que $x<-5$.
8. Soient a et b deux réels. Pour que $a+b<1$, il faut que $a<\frac{1}{2}$ et $b<\frac{1}{2}$.
9. L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x}<1$ est l'intervalle $]1,+\infty[$.
10. Pour tout entier naturel n, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x}>10^n$ est l'intervalle $]10^{2n},+\infty[$.

Exercice 1.8. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x-2|\le 3$
2. $|3-x|\le 4$
3. $|x-1|\le-\sqrt{2}$
4. $\mid x-5\mid+\mid x+1\mid<8$

Exercice 1.9. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré, minoré. Déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$E_1=]0,1],\ E_2=\mathbb{N},\ E_3=[0,+\infty[, E_4=\{x\in\mathbb{Q},\ x^2\le 2\}.$$

Exercice 1.10. Montrer que $\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$. En déduire une formule analogue pour $\max(x,y,z)$.

2 Thème 2 : Somme, produit fini, factorielle, somme arithmétique, somme géométrique

2.1 Symboles $\sum$, $\prod$ et factorielle

Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_{n_1}.$$

Par exemple, $\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.
Noter que le i qui apparait dans la formule ci-dessus est une variable muette : on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=0}^{3} i^2.$$

Par convention, une somme vide est égale à 0. Par exemple $\sum_{k=0}^{-1} k = 0$, puisqu'il n'y a pas d'indice k plus grand que 0 et plus petit que -1.

Exercice 2.1. (i) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} i, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{3} k, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{10} 1, \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} 3, \qquad S_5 = \sum_{i=-2}^{3} (i+2), \qquad S_6 = \sum_{i=0}^{3} (i+1)^2.$$

(ii) Ecrire les additions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ (sans les calculer) :

$S = 100 + 101 + 102 + \ldots + 199 + 200, \quad T = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{55} + \frac{1}{60}$

$R = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 38 + 40, \quad U = 3 + 9 + 15 + 21 + \ldots + 39 + 45$

(iii) Voici une table de données statistiques :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	-1	5	2	-2	5	2	1	3	4

Calculer :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \qquad T_2 = \sum_{i=1}^{10} i x_i, \qquad T_3 = \sum_{i=1}^{5} 2x_{2i}.$$

Soient $n_0 \leq n$ des entiers relatifs et $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_n$ des nombres réels. Les sommes de la forme $\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ sont dites télescopiques. En effet, si l'on écrit cette somme en extension, tous les termes se simplifient sauf u_{n+1} et u_{n_0}.

Par exemple,

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{7}(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) + (\sqrt{7}-\sqrt{6}) + (\sqrt{8}-\sqrt{7}) \\ &= -\sqrt{2} + (\sqrt{3}-\sqrt{3}) + (\sqrt{4}+-\sqrt{4}) + (\sqrt{5}-\sqrt{5}) + (\sqrt{6}-\sqrt{6}) + (\sqrt{7}-\sqrt{7}) + \sqrt{8}.\end{aligned}$$

Finalement $\sum_{i=2}^{7}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) = \sqrt{8}-\sqrt{2}$.

Exercice 2.2. Calculer les sommes téléscopiques A et B suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right), \qquad B = \sum_{k=1}^{99}\left[(k+1)^3-k^3\right].$$

La notation $\prod$ est l'équivalent de la notation $\sum$ pour les produits. Notons $n_0 \leq n_1$ des entiers relatifs et $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ des nombres réels. On note

$$\prod_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} \times x_{n_0+1} \times \ldots \times x_{n_1}.$$

Par exemple, $\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2$. Par convention, un produit vide est égal à 1.

Enfin , pour un entier n, on appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Par exemple, on a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. D'après la convention sur le produit vide, on a $0! = 1$.

Exercice 2.3. Calculer les produits suivants :

$$A = \prod_{i=1}^{3}(2i), \qquad B = 4!, \qquad C = 5!, \qquad D = \frac{5!}{4!}, \qquad E = \frac{4!}{5!}, \qquad F = \prod_{k=1}^{11}\frac{k+2}{k+3}, \qquad G = \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

2.2 Raisonnement par récurrence

Notons $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Fixons un entier naturel n_0.

Par le principe du raisonnement par récurrence, pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de montrer que :
1) (initialisation) $P(n_0)$ est vraie,
2) (hérédité) Soit n un entier quelconque tel que $n \geq n_0$. Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout entier $k \leq n$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

L'idée intuitive de ce raisonnement est la suivante. Comme la propriété $P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $P(n_0+1)$ est vraie par hérédité. Mais cette même propriété d'hérédité implique alors que la propriété $P(n_0+2)$ est vraie, donc la propriété $P(n_0+3)$ aussi et ainsi de suite. Ainsi, on obtient de proche en proche que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

On utilise souvent l'image suivante pour illustrer la récurrence. Imaginons une ligne infinie de dominos mis debout. L'initialisation est l'analogue de l'évènement "le premier domino de la ligne tombe" et l'hérédité est le principe "si un domino tombe, alors le suivant tombe aussi". Si ces deux principes sont vérifiés, on peut être sûr que tous les dominos de la ligne vont tomber.

Exemple 2.1. ***Suites arithmétiques.*** *Soient a un nombre réel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $n \geq n_0$:*

$$u_{n+1} = u_n + a.$$

On va montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a la propriété $P(n)$ suivante

$$P(n) \quad u_n = u_{n_0} + (n-n_0)a.$$

Initialisation. *Si $n = n_0$, on a bien $u_{n_0} = u_{n_0} + (n_0-n_0)a$. La propriété $P(n_0)$ est donc vraie.*

Hérédité. *Supposons que pour un entier $n \geq n_0$, on a la propriété $P(n)$, c'est-à-dire*

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)a.$$

Montrons la propriété $P(n+1)$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} = u_{n_0} + (n + 1 - n_0)a.$$

Par hypothèse, on a $u_{n+1} = u_n + a$. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$

$$u_{n+1} = (u_{n_0} + (n - n_0)a) + a,$$

d'où la propriété $P(n+1)$.

On a donc démontré que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Exercice 2.4.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,\ 2^n \geq n$.
2. **Suites géométriques.** Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $n \geq n_0$:
$$u_{n+1} = qu_n.$$
Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq n_0$,
$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
4. Soit q un nombre réel distinct de 1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Développer directement l'expression $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour trouver une autre démonstration de cette formule.

2.3 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 2.1. *Soit a un nombre réel. On appelle suite arithmétique de raison a toute suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres réels telle que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n + a.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a les propositions suivantes.

Proposition 2.1. *Soit a un nombre réel et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison a. Alors*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + a(n - n_0).$$

Proposition 2.2. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$,*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Définition 2.2. *Soit q un nombre réel. On appelle suite géométrique de raison q toute suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres réels telle que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = qu_n.$$

Là encore, on a déjà démontré les propositions suivantes.

Proposition 2.3. *Soit q un nombre réel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Alors*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Proposition 2.4. *Soit q un nombre réel distinct de 1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 2.5. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=20}^{100} (k+1),\ S_2 = \sum_{k=1}^{100} (5k+3),\ S_3 = \sum_{k=20}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k,\ S_4 = \sum_{k=1}^{100} 5 \times 10^k,\ S_5 = \sum_{k=1}^{20} (2 \times 2^k + 3k + 4).$$

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice 2.6. Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et en déduire une nouvelle démonstration de la formule ci-dessus.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$
4. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, +\infty[,\ \ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 2.7. Soient a et b deux réels. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right).$$

Que retrouve-t-on dans le cas où $a = 1$?

3 Thème 3 : Calculs dans $\mathbb{C}$: addition, multiplication, module, inverse, conjugué

3.1 Généralités sur les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

où $i^2 = -1$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 3.1. *On dit que l'écriture $z = a+ib$ où a et $b \in \mathbb{R}$, est la forme algébrique de z. Cette écriture est unique.*
$a = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $b = \Im(z)$ est la partie imaginaire de z.
Tout nombre complexe non nul tel que $\Re(z) = 0$ est appelé imaginaire pur.
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ deux nombres complexes. $z = z' \iff a = a'$ et $b = b'$.

$\mathbb{C}$ est muni de deux lois de composition internes, l'addition $+$ et la multiplication $\times$: soient $z = a+ib$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$.

1. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
2. $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

En pratique pour calculer un produit de deux nombres complexes, on n'utilise pas directement la formule ci-dessus (qu'il ne faut surtout pas apprendre par cœur !) mais on développe et on utilise le fait que $i^2 = -1$.

Exemple 3.1. *Mettons sous forme algébrique le nombre complexe $(-1 - i)(2 + 3i)$. On a*

$$(-1 - i)(2 + 3i) = -1.(2 + 3i) - i(2 + 3i)$$

$$= -2 - 3i - 2i - 3i^2 = -2 - 3i - 2i + 3 = 1 - 5i.$$

Définition 3.2. *Le module d'un nombre complexe z est : $\mid z \mid = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \in \mathbb{R}^+$.*
Le conjugué d'un nombre complexe z est : $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z) \in \mathbb{C}$.

Par exemple, $\mid 4 + 3i \mid = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ et $\overline{4 + 3i} = 4 - 3i$.

Notons $z = a+bi$ un nombre complexe mis sous forme algébrique (donc a et b sont des nombres réels). Alors $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a(a - bi) + bi(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = \mid z \mid^2$. Cette formule est très pratique pour mettre un quotient de nombres complexes sous forme algébrique : il s'agit alors de multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple 3.2. *Mettons sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{-1-i}{2-3i}$.*

$$\frac{-1 - i}{2 - 3i} = \frac{(-1 - i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{1 - 5i}{2^2 + 3^2} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$

Exercice 3.1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants. Dans chaque cas, calculer le module et la forme algébrique du conjugué du nombre complexe.

1. $z_1 = (1 + 3i) + (2 - i)$
2. $z_2 = (5 - i)(7 + 4i)$
3. $z_3 = (\frac{1}{2} - 4i) - (-\frac{3}{2} + 2i)$
4. $z_4 = (\frac{3}{4}i - 2)(i + 1)$
5. $z_5 = (2 + 5i)^2$
6. $z_6 = \frac{1}{2-i}$
7. $z_7 = \frac{3-3i}{1+i}$
8. $z_8 = \frac{i}{(3+i)^2}$

Exercice 3.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $(1+i)z - 5i = 2z + 1 + i$
2. $\dfrac{2z+1}{-z+3} = 4$
3. $z - 3 = (3+i)z + i$
4. $\dfrac{3z-i}{z+6-7i} = 3$

3.2 Equations du second degré

Exercice 3.3. Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

1. Trouver deux nombres complexes a et b tels que

$$z^2 + z + 1 = (z+a)^2 - b^2.$$

   Cela permet de mettre l'équation de départ sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $(z+a)^2 - b^2 = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ en utilisant une identité remarquable.

Exercice 3.4. En utilisant la même méthode, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations (on pourra factoriser par le coefficient dominant, par exemple 2 dans la première équation) : $2z^2 + 4z + 4 = 0$, $-z^2 + z - 1 = 0$, $-2z^2 + 6z - 5 = 0$.

Exercice 3.5. En utilisant la forme canonique et en factorisant, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $2x^2 + 8x + 2 \geq 0$, $2x^2 + 8x + 2 \leq 0$, $x^2 + 2x + 1 \leq 0$, $x^2 + 3x < -2$.

3.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

On fixe un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

* Le nombre complexe $z = a + ib$ est associé au point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Ce point M est appelé point image de z et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé vecteur image de z, tandis que $z = a + ib$ est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Le module de z s'interprète alors comme la distance OM ou la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\mid z \mid = OM = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|.$$

* Si les deux points A et B ont pour affixes respectives les nombres complexes z_A et z_B, alors $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
Le module de $z_B - z_A$ s'interprète alors comme la distance AB ou la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\mid z_B - z_A \mid = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel = AB.$$

* Si les deux points A et B ont pour affixes les deux complexes z_A et z_B, alors $(z_A + z_B)/2$ est l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
* Soient $M(a, b)$ le point d'affixe z et k un réel non nul. Le produit kz est l'affixe du point $P(ka, kb)$ vérifiant $\vec{OP} = k\vec{OM}$.
* Soient M le point d'affixe z. Alors le nombre complexe $\bar{z}$ est l'affixe du point $N(a, -b)$, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 3.6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + 2i,\ z_B = 3 + 4i,\ z_C = 2 - 2i,\ z_D = 4,\ z_E = i.$$

1. Placer les points A, B, C, D et E.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Qu'en déduit-on ?

3. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AE}$ et la comparer à l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3.7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on note A, B, C et D les points d'affixes respectives
$$z_A = 5+2i,\ z_B = 8+i,\ z_C = 1-i,\ z_D = -2.$$
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3.4 Exercices supplémentaires

Exercice 3.8. Déterminer et dessiner les ensembles suivants :

— $A = \{z \in \mathbb{C},\ z = \overline{z} + 2\}$.
— $B = \{z \in \mathbb{C},\ z^2 - i^2 = 0\}$.
— $C = \{z \in \mathbb{C},\ z^2 + 1 = 0\}$.
— $D = \{z \in \mathbb{C},\ z^2 + 9 = 0\}$.
— $E = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 2\}$
— $F = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$
— $G = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 3\}$
— $H = \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) < 5\}$
— $I = \{z \in \mathbb{C},\ |z-2| < 3\}$
— $J = \{z \in \mathbb{C},\ |3z| < 6\}$
— $K = \{z \in \mathbb{C},\ |3z+4| < 6\}$
— $L = \{z \in \mathbb{C},\ |3z+1| > 5\}$.

Exercice 3.9. Soient $a \neq 0$, b et c des réels. En utilisant la forme canonique, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et retrouver la formule vue au lycée.

Exercice 3.10. Calculer i^2,i^3 et i^4 ; en déduire les entiers n tels que i^n est imaginaire pur.

Exercice 3.11. Représenter l'ensemble des points d'affixe z tels que

1. $\Re(z) = -2$
2. $\Im(z) = \sqrt{2}$
3. $|z-3| = |z-3i|$
4. $|2-3i+z| = |2+3i|$
5. $|\overline{z} - 4 + i| = 1$

Exercice 3.12. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2iz - 3 = z + i$
2. $3z(z+i) = -iz$
3. $(\sqrt{3}z - i)(z + 2 + 3i) = 0$
4. $3z + 1 + 2iz = i - z - 2iz$
5. $5z + 2i = (1+i)z - 3$
6. $\dfrac{z-i}{z+i} = -3$
7. $-\dfrac{z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3 + i$
8. $z^2 + 2\overline{z} = -1$
9. $2z + i\overline{z} = 3$
10. $z^2 + z \cdot \overline{z} = 0$

Exercice 3.13. Sans calculer, répondre par vrai ou faux :
1. $(2-i)^2 + (2+i)^2$ est un réel.
2. $\overline{(2+i)^3} = (2-i)^3$
3. $\overline{3-iz} = 3 + iz$
4. $\dfrac{5-i}{3+2i} - \dfrac{5+i}{3+2i}$ est imaginaire pur.

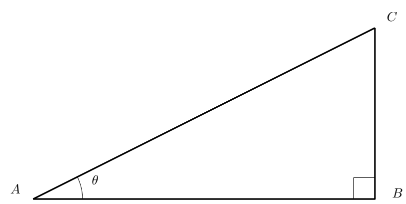
Exercice 3.14. Résoudre les équations suivantes en se ramenant à des équations du second degré :
1. $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$
2. $(t^2-5)(t^2+6t+14) = 0$
3. $x^3 + 6x^2 + 13x = 0$
4. $(t^2+3)(2t^2+2t-4) = 0$
5. $(4z^2-4z+101)(z^2+1) = 0$

Exercice 3.15. 1. Déterminer deux réels a et b tels que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+az+b)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?
3. Etablir que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$.
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

4 Thème 4 : Trigonométrie, forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe

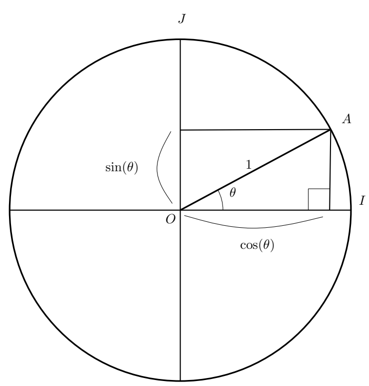
4.1 Cosinus et sinus d'un angle

Rappelons les définitions du cosinus et du sinus vues au collège. Soit ABC un triangle rectangle en B. Notons θ l'angle du triangle en A (exprimé en radians).



Alors le cosinus de θ est $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{AC}$ et le sinus de θ est $\sin(\theta) = \dfrac{BC}{AC}$. Autrement dit, $\cos(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle et $\sin(\theta)$ est le quotient de la longueur du côté adjacent à A par la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle.

Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) $\mathcal{C}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan de coordonnées (xOy) muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$) constitué des points à une distance 1 de l'origine : le cercle de centre O et de rayon 1. Il peut être identifié via les affixes au sous ensemble de $\mathbb{C}$ suivant $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} :| z |= 1\}$



Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle. Soit A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \theta$ en radian. Sur le dessin ci-dessus, on voit apparaître un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 1. Par conséquent, lorsque θ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point A et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Par extension, pour tout angle θ (en radian), on définit $\cos(\theta)$ comme l'abscisse du point A et $\sin(\theta)$ comme l'ordonnée du point A dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement des définitions du sinus et du cosinus :
* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (qui traduit le fait que $OA^2 = 1$).
* $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ (conséquence de la formule précédente).
* $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.

Voici des valeurs remarquables du cosinus et du sinus (à connaître).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice 4.1. En représentant les angles suivants sur le cercle trigonométrique et en utilisant les valeurs remarquables ci-dessus, déterminer les valeurs suivantes du cosinus et du sinus.

1. $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$.
2. $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$.
3. $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$.
4. $\cos(\frac{-\pi}{6})$, $\sin(\frac{-\pi}{6})$.
5. $\cos(\frac{-\pi}{4})$, $\sin(\frac{-\pi}{4})$.
6. $\cos(\frac{-\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
7. $\cos(\frac{-2\pi}{3})$, $\sin(\frac{-\pi}{3})$.
8. $\cos(\frac{-3\pi}{4})$, $\sin(\frac{-3\pi}{4})$.
9. $\cos(\frac{-5\pi}{6})$, $\sin(\frac{-5\pi}{6})$.

Exercice 4.2. On fixe un angle x. Á l'aide du cercle trigonométrique, exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1. $\cos(-x)$
2. $\sin(-x)$
3. $\cos(\pi + x)$
4. $\sin(\pi + x)$
5. $\cos(\pi - x)$
6. $\sin(\pi - x)$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$
8. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

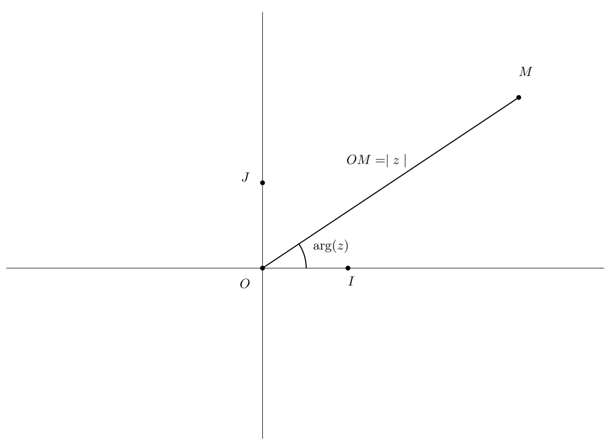
Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ d'affixe z. Alors, si l'on note θ l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ en radian, alors on a vu que l'abscisse de M est $\cos(\theta)$ et que son ordonnée est $\sin(\theta)$. Par conséquent, $z = \cos\theta + i\sin\theta)$.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$. $r =\mid z \mid= \sqrt{x^2+y^2} > 0$ son module. Alors $\mid \dfrac{z}{r} \mid= 1$. Donc il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\dfrac{z}{r} = \cos\theta + i\sin\theta$. La forme trigonométrique de z est

$$z =\mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta).$$

θ est appelé un *argument* de z. $\theta + 2k\pi$ en sont d'autres ($k \in \mathbb{Z}$).
Attention : 0 n'a pas d'argument.

Théorème 4.1. *Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.*

Prenons un point M du plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ d'affixe z. Alors le module de z représente la longueur OM et un argument de z représente l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.



Pour tout réel θ, on définit $e^{i\theta}$ comme le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Une raison qui peut justifier la notation exponentielle ici est la propriété suivante.

Proposition 4.1. *Pour tous nombres réels θ, θ' et tout entier $n > 0$*

1. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ *et* $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$.
2. *(Formule de Moivre)* $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
3. *(Formules d'Euler)* $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

D'après ce que l'on a vu sur la forme trigonométrique d'un nombre complexe, tout nombre complexe non-nul z s'écrit $z = \mid z \mid e^{i\theta}$, où θ est un argument de z. On appelle cette écriture de z la forme exponentielle du nombre complexe z.

Exercice 4.3. 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes $e^{i\pi}$, $e^{i5\pi/6}$, $e^{-i\pi/4}$.

2. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

$$1, \qquad i, \qquad i^2, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{3} - i, \qquad -2-2i, \qquad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad -2+2i\sqrt{3},$$

3. Représenter dans le plan complexe tous les nombres complexes vus dans cet exercice.

Exercice 4.4. Soient a et b deux nombres réels.

1. En utilisant la formule $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ et en calculant la forme algébrique du membre de droite, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
2. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{7\pi}{12})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$ (on remarquera que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$).
3. En déduire des formules analogues pour $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.
4. En utilisant la formule d'Euler, exprimer $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

4.3 Exercices supplémentaires

Exercice 4.5. Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non-nuls écrits sous forme exponentielle.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle. z^2, zz', $-z$, $\frac{1}{z}$, $\overline{z}$, $\dfrac{z'}{z}$.
2. En déduire des formules sur l'argument du produit de deux nombres complexes, de l'inverse d'un nombre complexe et d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 4.6. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants, puis leur forme exponentielle :

1. $z_1 = \sqrt{3} + 3i, z_2 = -2+2i, z_3 = -i, z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, z_6 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
2. $z_1 = 5-5i, z_2 = (-i)(2+2\sqrt{3}i), z_3 = (-1+i\sqrt{3})^3$
3. $z_1 = -(\sqrt{6}+i\sqrt{2}), z_2 = (\sqrt{6}+i\sqrt{2})i, z_3 = \dfrac{i}{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^2}$

Exercice 4.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0; \sin x = 1; \sin x = -1; \sin x = \frac{1}{2}; \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$
2. $\cos x = 0; \cos x = 1; \cos x = -1; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos x = \frac{3}{2}.$

Exercice 4.8. Démontrer la formule de Moivre à l'aide d'une récurrence.
Démontrer la formule d'Euler.

Exercice 4.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \;\; \cos(2x) = \cos^2 x; \;\; |\sin(nx)| = 1; \;\; 12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2.$$

Exercice 4.10. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres complexes qui vérifient la relation donnée.

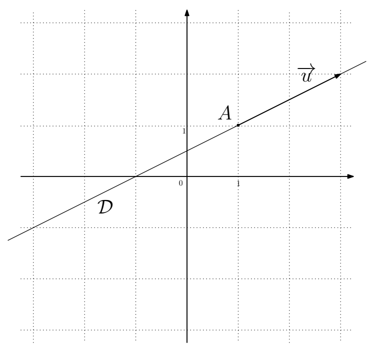
1. $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)(2\pi)$
2. $\arg(\bar{z}+2) = -\frac{\pi}{2}$
3. $\arg(z-2) = \arg(z-i)$

5 Thème 5 : Droites du plan

5.1 Droites du plan : définition

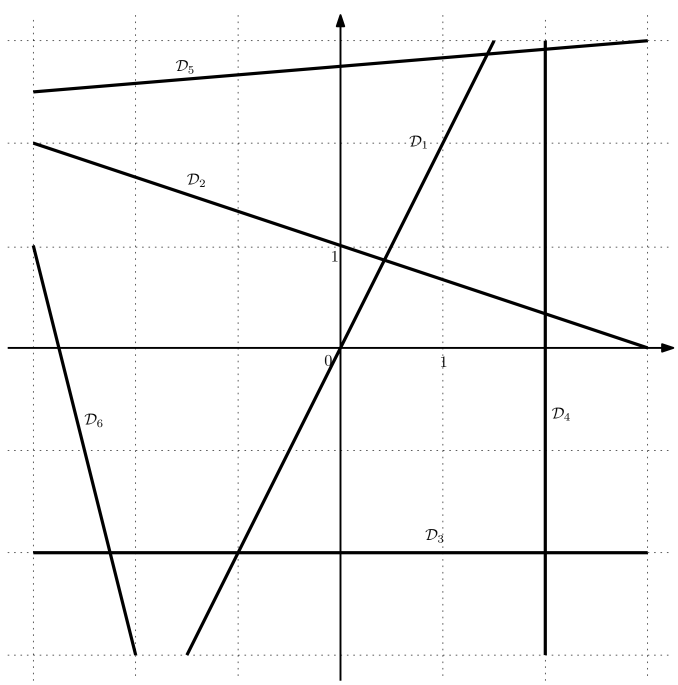
Définition 5.1. *Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan non-nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$.*

Sur la figure suivante, on a représenté la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,1)$.



Plus généralement, on appelle vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme $\lambda\overrightarrow{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 5.1. Pour chacune des droites suivantes $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite.



Sur le même dessin, tracer la droite passant par le point $A(-1,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1)$ et la droite passant par le point $B(1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,0)$.

5.2 Équations d'une droite

On munit le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pour tout point M du plan, on note (x, y) ses coordonnées dans ce repère.

Proposition 5.1. *Tout ensemble du plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ est une droite du plan. Réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des nombres réels, ou de la forme $x = c$, où c est un nombre réel.*

Remarquer qu'une droite donnée peut avoir plusieurs équations. Ainsi la droite d'équation $y = 3x + 1$ a aussi pour équation $y - 3x - 1 = 0$ ou $2y - 6x - 2 = 0$ ou encore $-y + 3x + 1 = 0$.

Définition 5.2. *Si une droite $\mathcal{D}$ du plan a une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des réels, on appelle a le* coefficient directeur *de la droite $\mathcal{D}$. Quant au coefficient b il représente l'ordonnée du point d'abscisse* 0 *de la droite : c'est pourquoi il est appelé ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 5.2. Pour chacune des équations suivantes, déterminer si l'ensemble des solutions est une droite. Si c'est le cas, tracer la droite en question et en donner un point et un vecteur directeur.

1. $y = 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 = 0$
3. $y + x^2 = 0$
4. $4y + x + 4 = -2 + 2x$
5. $x = 9$
6. $xy = 0$
7. $y = -1$

Pour trouver l'équation d'une droite, si la droite en question n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, il s'agit de trouver deux coefficients a et b de sorte que la droite a pour équation $y = ax + b$. Pour trouver a et b, il suffit de trouver les coordonnées de deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ qui appartiennent à cette droite. On a alors un système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_A & = & ax_A + b \\ y_B & = & ax_B + b \end{array} \right. .$$

Ce système permet alors de retrouver les coefficients a et b. Notamment, on peut retrouver a directement en faisant la différence entre les deux lignes du système.

Si la droite en question est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = c$. Il suffit alors de déterminer un point $A(x_A, y_A)$ de cette droite qui aura pour équation $x = x_A$.

Exercice 5.3. Tracer et donner une équation de la droite :

1. Passant par les points $A(0, 0)$ et $B(4, 2)$
2. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(20, 10)$
3. Passant par les points $A(1, 1)$ et $B(1, 20)$.
4. Passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{vd}}\ (-1, 1)$
5. Passant par le point $A(2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{vd}}\ (0, 3)$
6. Passant par le point $A(-1, 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{vd}}\ (40, 40)$

Exercice 5.4. Pour chacune des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$ représentées dans l'exercice 5.1, déterminer une équation de la droite.

5.3 Intersections de droites

Deux droites données du plan sont soit parallèles, soit sécantes.

Exercice 5.5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection entre les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y = -x + 4$.
2. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2y + x = 3$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y + 2x = 4$.
3. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -3$.

4. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $2x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $-2y - 4x = -4$.
5. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par les points $A(1,1)$ et $B(3,2)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(4,2)$.
6. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1,-1)$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par les points $A'(0,1)$ et $B'(1,0)$.

Exercice 5.6. Dans chacun des cas suivants, résoudre le système et l'interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} 3x + 2y &= 5 \\ x + 3y &= 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y &= 5 \\ -x - y &= 3 \end{cases}$

5.4 Zones du plan délimitées par des droites

Exercice 5.7. Pour chacune des inéquations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions et le dessiner.

1. $y \geq 2x - 1$
2. $2y + 6x - 3 < 0$
3. $4y + x + 4 \leq -2 + 2x$
4. $x > 9$
5. $y \leq -1$

Exercice 5.8. Tracer les ensembles de solutions des équation/inéquations suivantes.

1. $xy = 0$
2. $0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq -x + 6$
3. $y \leq -2x + 1, \quad y \geq -2x - 1, \quad x \geq 0$
4. $xy > 0$
5. $xy \geq 0$
6. $x + 2y + 3 \geq 0, \quad y - x + 3 \geq 0$
7. $x \geq 0,\ y \geq 2x + 1, \quad y \leq -x + 1$
8. $7(x - 2y)(y + x) \geq 0$.

5.5 Exercices supplémentaires : plans et droites de l'espace

L'espace de dimension 3 est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$. La définition de la notion de droite dans l'espace est très similaire à la définition dans le cas du plan.

Définition 5.3. *Soit A un point de l'espace (de dimension 3) et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace non-nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.*

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace : La représentation paramétrique suivante des droites de l'espace découle directement de la définition. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(x_u, y_u, z_u)$. Alors la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points de l'espace $M(x, y, z)$ tels qu'il existe un paramètre réel λ tel que

$$\begin{cases} x &= x_A + \lambda x_u \\ y &= y_A + \lambda y_u \\ z &= z_A + \lambda z_u \end{cases}.$$

Avant de définir ce qu'est un plan dans l'espace, on a besoin de rappeler la définition suivante.

Définition 5.4. *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un d'entre eux est nul ou il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$.*

Définition 5.5. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace* non colinéaires *et A un point de l'espace. On appelle plan passant par A et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2.\overrightarrow{v}$.*

Pour déterminer une base d'un plan, il suffit de trouver trois points non-alignés A, B et C de ce plan. La famille de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme alors une base du plan $\mathcal{P}$.

On admettra le théorème suivant qui est l'analogue de la représentation des droites du plan par une équation.

Théorème 5.1. *Les plans de l'espace de dimension* 3 *sont les sous-ensembles de l'espace de dimension* 3 *qui ont une équation de la forme* $ax + by + cz = d$*, avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *et* $d \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.9. Déterminer un point et une base des plans suivants donnés par une équation.

1. Le plan d'équation $-x + y - z = 2$.
2. Le plan d'équation $y - 2z = 0$.
3. Le plan d'équation $x = 3$.

Exercice 5.10. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersections de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$.

1. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(1, 1, 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 1, 0)$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + y + z = 0$.
2. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(-1, 1, -2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 1, 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y - z = 0$.

Exercice 5.11. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la définition de la notion de plan, déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$. En résolvant le système en les paramètres λ_1 et λ_2 obtenus, en déduire une équation du plan $\mathcal{P}$.

1. Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1, -2, 0)$ et a pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}(1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v}(-1, 2, 0)$.
2. Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1, -2, 0)$ et a pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}(1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 1, -3)$.

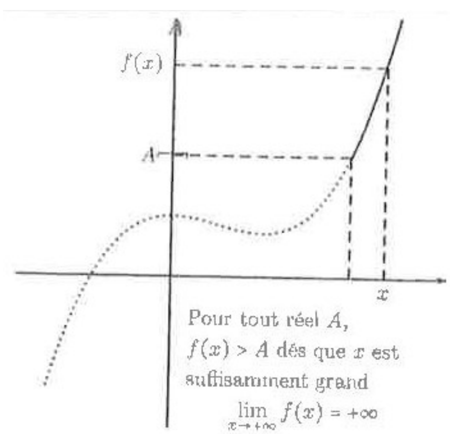
6 Thème 6 : Limites de fonctions Fonctions puissances, exponentielle et logarithme

6.1 Limites de fonctions

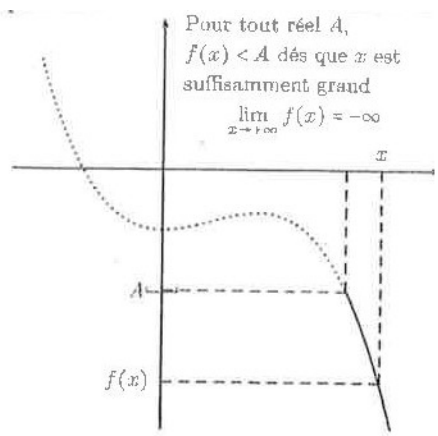
6.1.1 Limite infinie en l'infini

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.

1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

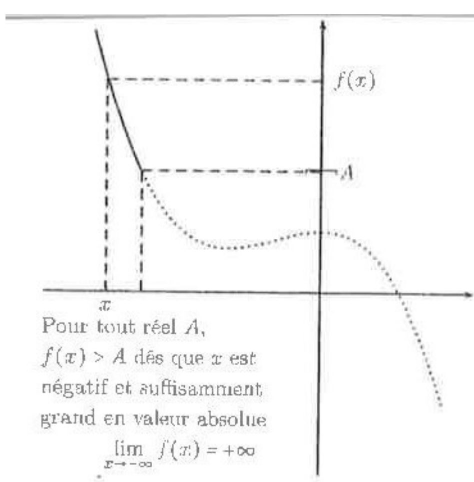


2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

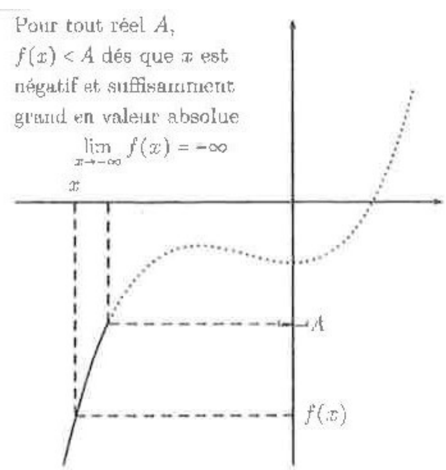


Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$.

1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si



2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si

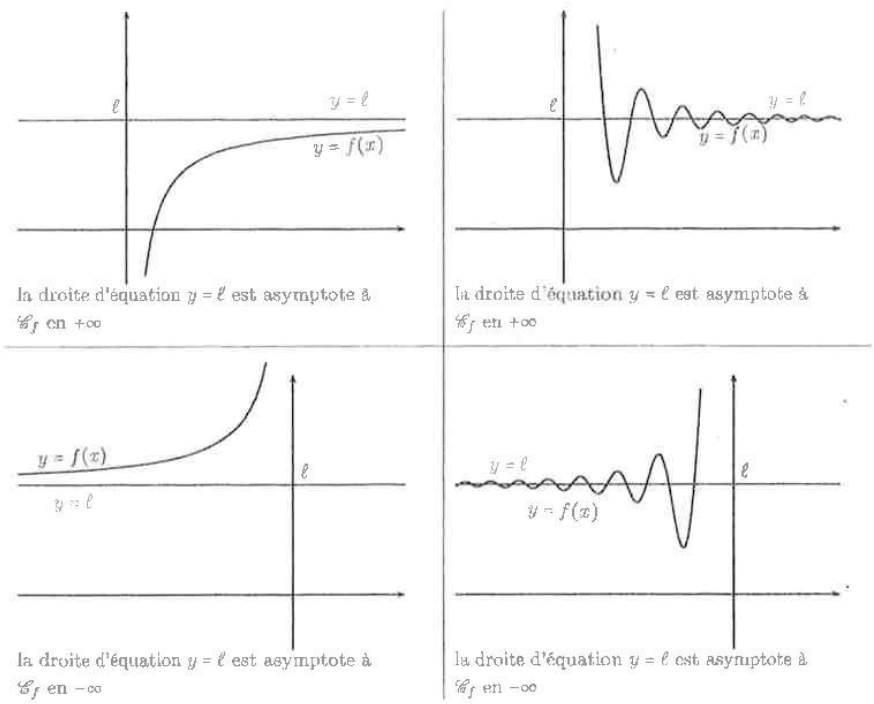


Par exemple :
1) les fonctions $\exp, \ln, \sqrt{\cdot}$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$;
2) un polynôme a la même limite en $\pm\infty$ que son terme de plus haut degré.

6.1.2 Limite réelle en l'infini

Définition. 1) Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ et l un réel. On dit que $f(x)$ tend vers le réel l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de centre l contient $f(x)$ pour x assez grand. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
2) Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha]$ et l un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers le réel l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de centre l contient $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue. On écrit alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Droite asymptote parallèle à l'axe des abscisses
1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
2) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

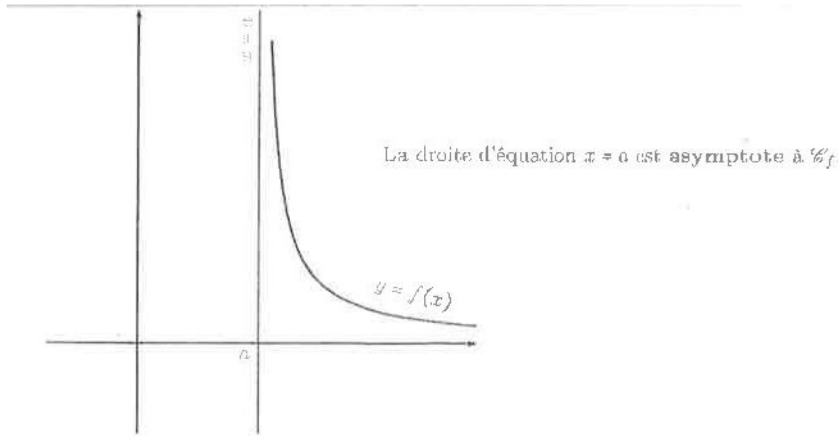


Exercice 6.1. Parmi les fonctions $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ et $f_4(x) = x^{-2}$, lesquelles ont une représentation graphique qui admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$?

6.1.3 Limite infinie en un réel

Définition. Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.
1) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$, $A \in \mathbb{R}$, contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Droite asymptote parallèle à l'axe des ordonnées
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.



Exercice 6.2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x-2}$. Montrer graphiquement (en translatant la fonction $f(x) = 1/x$) que $\lim\limits_{x \to 2, x>2} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2, x<2} g(x) = -\infty$.

6.1.4 Limite réelle en un réel

Définition. Soient a et l deux réels. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un intervalle de la forme $]a-b, a[$, $b \in]0, +\infty[$, ou un intervalle de la forme $]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$, ou même contenant $]a-b, a[\cup]a, a+b[$, $b \in]0, +\infty[$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert de centre l contient $f(x)$ dès que x est dans D et suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque. Les limites à droite et à gauche peuvent ne pas coïncider.
La limite d'une fonction en un point, ou en l'infini, n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par la droite, et vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par la gauche : elle n'a donc pas de limite définie en 0, même si elle a une limite à gauche et une limite à droite.

6.1.5 Opérations sur les limites

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f.g$ a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	$l>0$ *ou* $+\infty$	$l<0$ *ou* $-\infty$	0
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Composée de limites. Soient a, b et c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soient f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t \to b} g(t) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Exercice 6.3. Soient les 3 fonctions suivantes.

$$f_1(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2},\ f_2(x) = 2 - \frac{5}{x^2},\ f_3(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{1+x}.$$

Déterminer les limites de f_1, f_2 et f_3 en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer la limite de f_1 en -2, la limite de f_2 en 0 et la limite de f_3 en -1.

Exercice 6.4. Déterminer les limites suivantes.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 7x + 5)$, $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \dfrac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x \to 0, x<0} \dfrac{2x-3}{x^2+x}$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.1.6 Comment lever une indétermination

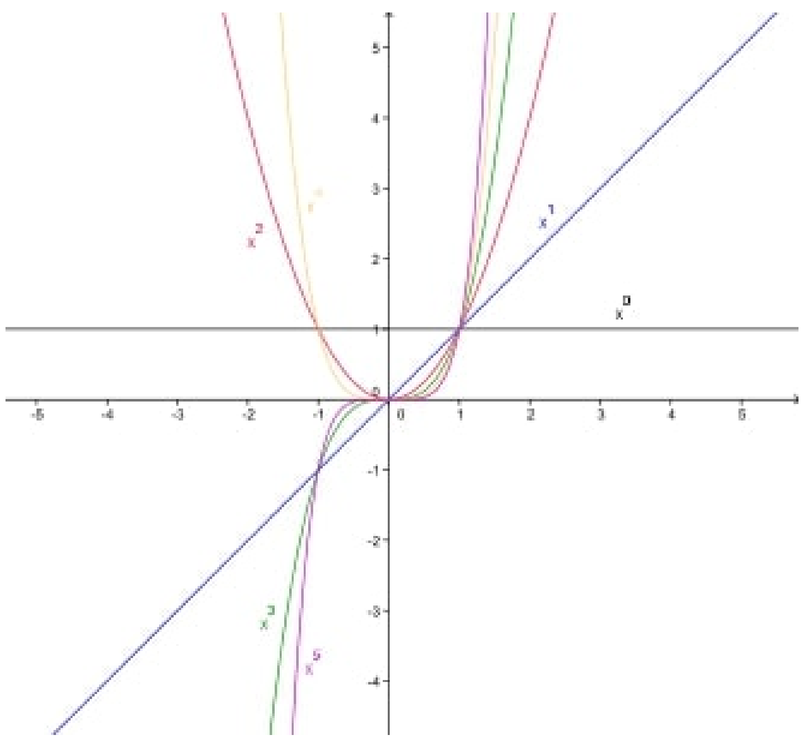
Les **quatre formes indéterminées** sont : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$.

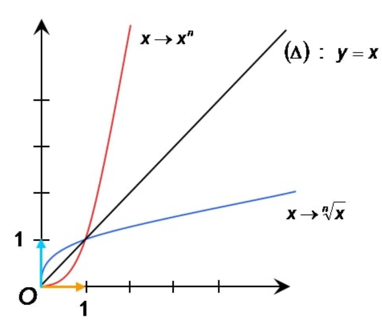
Une méthode consiste à **mettre le terme prépondérant en facteur.**

Exercice 6.5. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 3x + 5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{3x^2 + x + 1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -1, x>-1} \dfrac{4x^2 - x + 5}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}$.

6.2 Etude et graphe de fonctions usuelles

6.2.1 Fonctions Puissances





6.2.2 Fonction Exponentielle

Définition. L'exponentielle réelle, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $(\exp x)' = \exp x$ et $\exp(0) = 1$.

Relations fonctionnelles : Pour tous réels a et b et tout entier relatif n
$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{exp(b)}$ et $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Propriétés. $\exp x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Notations. $\exp(x) = e^x$, où $\exp(1) = e$.

Exercice 6.6. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^x \times e^{-x}$, $B = e^x + 2e^x$, $C = (e^x)^3 e^{-2x}$, $D = (e^x)^{-2} e^{3x}$, $E = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$,
2. $F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$, $G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$, $H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$ et $I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

6.2.3 Fonction Logarithme Népérien

Définition. La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On note $y = \ln x$.

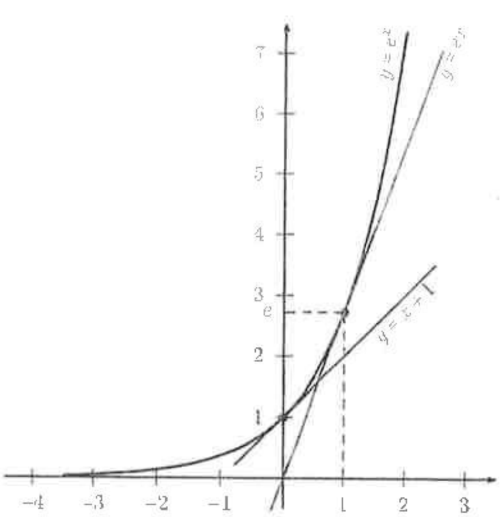
Relations fonctionnelles : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.
Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$

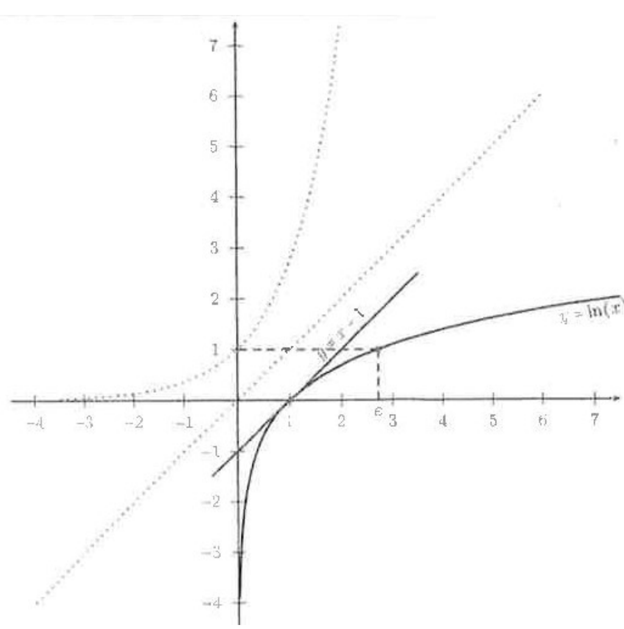
Propriétés. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$; c'est la réciproque de la fonction exponentielle.
Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. Et pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.
ln est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ (voir chapitre suivant).
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \ln x = -\infty$.

Exercice 6.7. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$\frac{1}{2}\ln 16$; $\ln\frac{1}{2}$; $\ln 36 - 2\ln 3$; $2\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0,875$.

Exercice 6.8. Calculer $x = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$ et $y = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\frac{1}{4}$.

Voici les graphes des fonctions exponentielle et logarithme népérien respectivement





6.3 Exercices supplémentaires

Exercice 6.9. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-(x-2)^2)$.

Exercice 6.10. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos(\dfrac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin 2x}$.

Exercice 6.11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$e^{-x}+1=0$; $e^{3x+1}-e^{-x}<0$; $e^{2x}+2e^x<3$; $e^{3x}=4$; $e^{-2x}<2$.

Exercice 6.12. Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
$f : x \mapsto e^{3-x}$ sur $\mathbb{R}$; $f : x \mapsto \frac{e^{2x}+2}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$, $f : x \mapsto e^{2x}-e^x+1$ sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto e^{\frac{1+x^2}{1+x}}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Exercice 6.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$\ln(5-x)>2\ln(x+1)$; $\ln x=0$; $(2+x)\ln(x-3)=0$; $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(4+2x)$; $\ln x\geq 2\ln 5$; $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geq 0$; $2^x=3^{2x+1}$; $(\frac{1}{3})^x=\frac{3}{2}$; $4^x-5\cdot 2^x+6\leq 0$

Exercice 6.14. Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to-2^+}\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$

Exercice 6.15. Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0^+ et en $+\infty$:
$f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$; $h(x)=\dfrac{-1}{\ln x-1}$; $i(x)=(\ln x)^2-\ln x$.

7 Thème 7 : Etude de fonctions et représentation graphique de fonctions

Dans ce chapitre, nous verrons comment mener l'étude d'une fonction définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et comment tracer son graphe $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ dans un plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère).

7.1 Ensemble de définition et courbe représentative

7.1.1 Premières définitions

Définition. Soit f une fonction. Le **domaine de définition** de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemples :
1) Pour définir le quotient de deux fonctions, il faut que celle qui se trouve au dénominateur ne s'annule jamais. L'ensemble de définition de $f_1(x) = \frac{x-1}{4x+1}$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$.
2) Pour définir la racine $\sqrt{f}$ d'une fonction f, il faut que f soit toujours positive ou nulle. L'ensemble de définition de $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ est donc $[-1, +\infty[$.
3) Pour définir le logarithme népérien $\ln(f)$ d'une fonction f, il faut que f soit toujours strictement positive. L'ensemble de définition de $f_3(x) = \ln(x-3)$ est donc $]3, +\infty[$.

Exercice 7.1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
$f_1(x) = \frac{x-1}{4x^2+4x+1}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$; $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.
$f_4(x) = \ln(x^2 - 3x)$; $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+2}$; $f_6(x) = \frac{x}{\exp(x^2)+1}$.

Définition. Le plan est rapporté à un repère (souvent orthonormé) $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ de f ou plus simplement le **graphe** de f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un réel de l'intervalle I. Une équation de ce graphe est $y = f(x)$, $x \in I$.

7.2 Etude générale

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe se trace "sans lever le crayon". Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition :

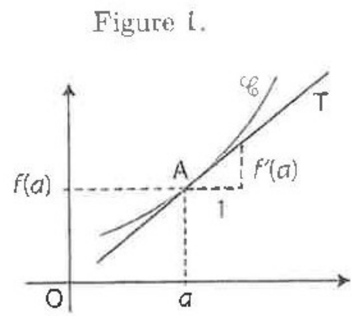
1. $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}^*$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
4. $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \exp x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

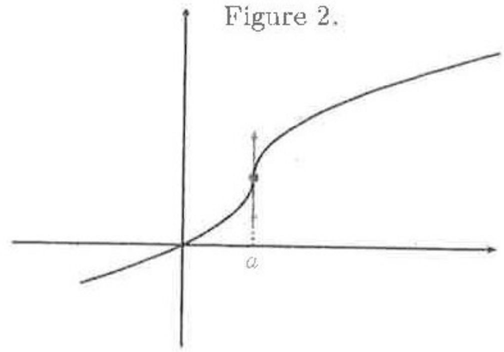
En additionnant, en multipliant et en quotientant (à condition, de se situer en dehors des points qui annulent le dénominateur) des fonctions continues, on construit de nouvelles fonctions continues.
Exemples. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

7.2.1 Dérivabilité, calcul de la dérivée, tangente

Définition-Propriété.
1) On dit que f est **dérivable en un point** a de son domaine de définition si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite

lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.
2) On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. On parle alors de **fonction dérivée** f' définie sur I.
3) Soit f une fonction dérivable en $a \in D_f$.
Dans un repère, la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$ (voir la figure 1. ci-dessous).
Une équation de T est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.





Remarque. Il n'est pas nécessaire que la fonction f soit dérivable en a pour que sa courbe $\mathcal{C}_f$ admette une tangente au point $(a, f(a))$. En effet si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a. Néanmoins $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour tangente au point $(a, f(a))$ (voir la figure 2. ci-dessus).

Exemples. En utilisant la définition de la dérivée en un point, on calcule les deux limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Pour calculer la dérivée d'une fonction à partir de son expression, on se sert le plus souvent des formules et règles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$g(x) = f(ax+b)$	$af'(ax+b)$	D_g

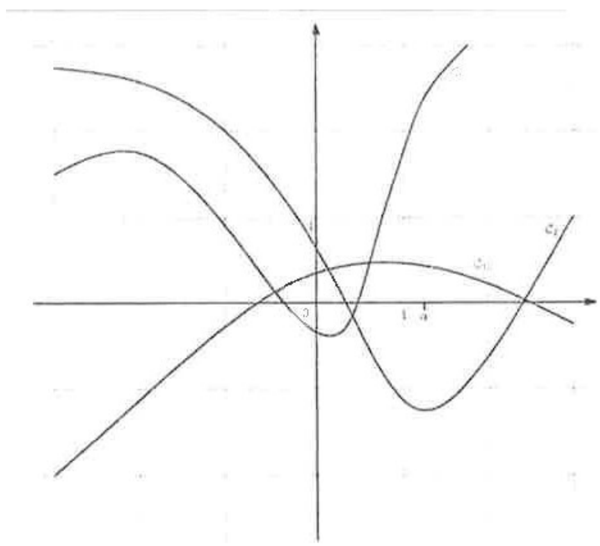
Propriété. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
1) la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$,
2) la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$,
3) la fonction ku (k est une constante réelle) est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$,
4) si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$.
5) si $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Propriété. Si u est une fonction dérivable sur I, alors u est continue sur I.
Attention la réciproque est fausse.

Exercice 7.2. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+3x-7}{10}$, $f_2 : x \mapsto x + \sqrt{x}$, $f_3 : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}$, $f_4 : x \mapsto x^2 \cos x$, $f_5(x) = 4xe^x$.

Exercice 7.3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes en son point d'abscisse a.
$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = 2$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 3$ en $a = 1$; $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{x+2}$ en $a = 0$.

Exercice 7.4. On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2 et f_3. À l'aide des courbes représentatives ci-dessous, calculer $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ et $f_3'(a)$.



7.2.2 Signe de la dérivée et sens de variation

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
1) f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
2) f est strictement croissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
f est strictement décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
3) f est constante sur I ssi $\forall a, b \in I$, $f(a) = f(b)$.
4) On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Propriété. Soit f une fonction dérivable sur I.
1) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
2) Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

7.2.3 Dérivée et extremum

Définition-Propriété. Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. Soit $I \subset D_f$.
1) Un maximum de f sur I (maximum local de f) est un extremum x_0 sur I pour lequel $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.
2) Un minimum de f sur I (minimum local de f) est un extremum x_0 sur I pour lequel $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.
3) Supposons que f soit dérivable sur I. Les extrema de f sur I, sont des points x tels que $f'(x) = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse. En effet, la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$, vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.

Dans la pratique, pour trouver les extrema de f, on étudie le signe de f'. Par exemple, si $f'(x_0) = 0$, que $f'(x) < 0$ pour x proche de x_0 à sa gauche et $f'(x) > 0$ pour x proche de x_0 à sa droite, alors x_0 est un minimum local. Il est commode de tracer un tableau de variations.

7.2.4 Représentation graphique de fonction

On suit en général le programme suivant :
1) On précise les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
2) Là où c'est possible, on calcule la dérivée f' et on étudie son signe.
Ceci indique les variations de la fonction f (on reporte les résultats dans un tableau).
3) On détermine les éventuels extrema de f et la valeur qu'elle y prend.
4) On calcule les limites de f aux bornes du domaine de définition.
5) On détermine les éventuelles asymptotes.
6) On peut aussi calculer, à la main, quelques valeurs simples prises par la fonction f.
7) Puis, on reporte le tout dans un plan muni d'un repère.

Exercice 7.5. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$.
1) Calculez $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$ et vérifiez que $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 - 3x^2 - 1$.
2) On note g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
a) Etudiez les variations de g.
b) Prouvez que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1, +\infty[$ et que $\alpha \in [1.6; 1.7]$.
c) Déduisez-en, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
3) En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau de variastions de f.
4) Ecrivez une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, au point A d'abscisse 0.
Etudiez la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ sur l'intervalle $]-1, 1]$.
5) Prouvez que $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente d au point d'abscisse 1.
6) Tracez $\mathcal{C}$, Δ et d.

7.3 Exercices supplémentaires.

Exercice 7.6. .
1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Prouvez que f n'est pas dérivable en zéro.
2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Prouvez que g n'est pas dérivable en zéro.
3) Soit h telle que $h(x) = 2 - x^2$ si $x < 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 1.

Exercice 7.7. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :
$i(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$; $j(x) = (x-1)[2\ln(x) + 5]$ sur $I =]0, +\infty[$; $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.8. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.
$f_1 : x \mapsto \left(\frac{x}{3+2\sqrt{x}}\right)^2$, $f_2(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$,

Exercice 7.9. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

8 Thème 8 : Calcul intégral

8.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Choisissons un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Définition. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue et positive sur $[a, b]$.
1) Le **domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}_f$ est le domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
2) L'**intégrale de** a **à** b **de la fonction** f est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathcal{C}_f$. On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles. Pour tous a, b, c tels que $a \leq b \leq c$, $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exercice 8.1. 1) Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 2]$ puis donner la valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ sans calcul.
2) Soit la fonction f définie sur $[1, 3]$ par $f(x) = x + 1$. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[1, 3]$ puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$ comme l'aire d'un trapèze rectangle.

8.2 Notion de primitives

Théorème. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Dire que la fonction F est une **primitive de** f **sur** I signifie que F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Propriété. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I.
1) L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.
2) Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarques. Une fonction a une infinité de primitives. La primitive n'est définie qu'à une constante additive près.
Il n'y a unicité de la primitive que si l'on impose une valeur particulière en un point donné de I.

8.3 Calculs de primitives

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

fonction f	primitives de f sur I	conditions sur u
$u'u^n (n \in \mathbb{Z}^* \text{ et } n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	lorsque $n < -1, u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$u'v + uv'$	$uv + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

Formulaire de primitives.

f est définie sur	I	les primitives de f sur I sont
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$kx + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$	$\ln(-x) + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$

Soient $a > 0$ et b deux réels. Les primitives de $\frac{1}{ax+b}$ sont $\frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$ sur $]\frac{-b}{a}, +\infty[$ et sont $\frac{1}{a}\ln(-ax-b) + C$ sur $]-\infty, \frac{-b}{a}[$.
Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les primitives de e^{ax+b} sont $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.2. Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2, I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
2. $f(x) = 3x+1+\frac{1}{x^2}, I =]-\infty, 0[$ et $F(-2) = 1$.
3. $f(x) = (x^2+1)^2, I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
4. $f(x) = e^{x+1}$ et $F(\ln 2) = 0$.

Exercice 8.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 10e^x + \frac{18x-\pi}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^4}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
4. $f : x \mapsto x^2 e^{2x^3}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $I =]0, +\infty[$

8.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition. Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b dans I, l'**intégrale de** a **à** b **de** f, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(x)]_a^b$, où F est une primitive de f sur I.

Remarques. Dans cette définition, il est important que f soit continue sur $[a, b]$ fermé.
La lettre x, dite "variable muette", n'a pas d'importance en soi ; on aurait aussi pu écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f(u)du$, etc.
La primitive que l'on a choisi dans la définition n'importe pas : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors on a $F_1 - F_2 = C$ où C est une constante, donc $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Intégrale et aire algébrique
Dans un repère orthogonal, $\mathcal{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
L'aire algébrique de $\mathcal{D}$ est la somme des portions d'aires comptées positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessous de l'axe des abscisses. Cette aire algébrique est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

8.5 Propriétés des intégrales pour des fonctions continues de signe quelconque

1) Si $f = 0$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$;
2) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (mais la réciproque est fausse).

3) Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.
4) L'intégrale est linéaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g sont continues sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b (f+\lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$$

5) l'intégrale vérifie la relation de Chasles : si f est continue sur I et que $a, b, c \in I$ (ne vérifiant pas nécessairement $a \leq b \leq c$), alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

En particulier, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Théorème. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Soit $\alpha \in [a,b]$. Alors la fonction F définie sur $[a,b]$ par $(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $[a,b]$, nulle en α.

Exercice 8.4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{-1}(t^2 - 4t + 3)dt$;
2. $\int_0^\pi \cos t dt$;
3. $\int_1^2 (t^2 + t - \frac{1}{t} + \frac{3}{\sqrt{t}})dt$;
4. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$;
5. $\int_0^1 5(e^{x+9} + x^9)dx$;
6. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}dx$,

8.6 Exercices supplémentaires.

Exercice 8.5. Déterminer une primitive sur I pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$;
3. $f(x) = 2\sqrt{2x+3}$ sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$;
4. $g(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$,
5. $h(x) = 3xe^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$,
6. $i(x) = \frac{e^x}{(3e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$,
7. $j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $]0, +\infty[$.
9. $g : x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$ sur $]0, +\infty[$.
10. $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
11. $k : x \mapsto \frac{\ln 2 - 3\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^1 \frac{e^{\sqrt{t}-1}}{2\sqrt{t}}dt$,
2. $\int_{-1}^2 |x^2 - 2x|dx$,
3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t/2)dt$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t/2)dt$ (calculer d'abord $J + K$ et $J - K$).